

F12 - Modellval, Maskininlärning och AI

Statistisk översiktscurs

Ulf Högnäs

Statistiska institutionen
Stockholms universitet

April 22, 2026

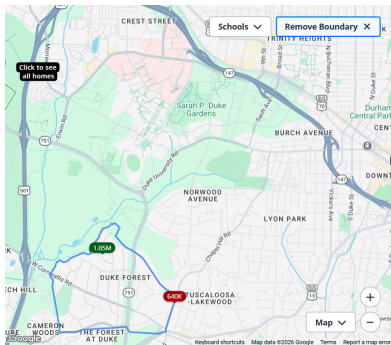


Stockholm
University

- 1 Modellval
- 2 Maskininlärning
- 3 Training, Validation, and Testing
- 4 Natural Language Processing och Chatbottar

Modellval

Duke Forest



Duke Forest, Durham, NC. Zillow.com.



Den 18:e observationen i duke_forest från paketet openintro. Zillow.com.

Att välja mellan olika regressionsmodeller

Call:

```
lm(formula = log(price) ~ bed + bath + area + year_built + heating3 +  
  cooling + parking3 + lot, data = df)
```

Residuals:

	Min	1Q	Median	3Q	Max
	-1.92300	-0.12713	0.01729	0.16138	0.68941

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	6.462e+00	4.126e+00	1.566	0.120999
bed	-1.458e-02	5.899e-02	-0.247	0.805426
bath	1.077e-01	5.465e-02	1.970	0.052034 .
area	1.167e-04	5.168e-05	2.258	0.026497 *
year_built	2.875e-03	2.109e-03	1.363	0.176288
heating3Heat pump	8.505e-02	1.278e-01	0.666	0.507464
heating3Other	-1.843e-01	7.827e-02	-2.355	0.020811 *
coolingcentral	1.346e-01	7.246e-02	1.858	0.066585 .
parking3Garage	2.684e-02	1.071e-01	0.251	0.802706
parking3Other	-5.073e-03	1.090e-01	-0.047	0.962971
lot	7.147e-01	1.772e-01	4.033	0.000119 ***

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.3204 on 86 degrees of freedom

(1 observation deleted due to missingness)

Multiple R-squared: 0.5396, Adjusted R-squared: 0.4861

F-statistic: 10.08 on 10 and 86 DF, p-value: 5.347e-11

Ett sätt att välja vilka förklaringsvariabler som ska vara med är

Backward elimination

- 1 Skatta en stor modell med många eller alla förklaringsvariabler
- 2 Ta bort förklaringsvariabeln med sämst p-värde och skatta modellen igen. Om det är en kategorisk variabel, använd kategorin med det lägsta p-värdet för att jämföra
- 3 Om R_{adj}^2 ökade, upprepa steg 2
- 4 Om R_{adj}^2 minskade, lägg tillbaka variabeln och prova att ta bort en annan variabel
- 5 Du är klar när du inte kan förbättra R_{adj}^2

Jag illustrerar detta i R

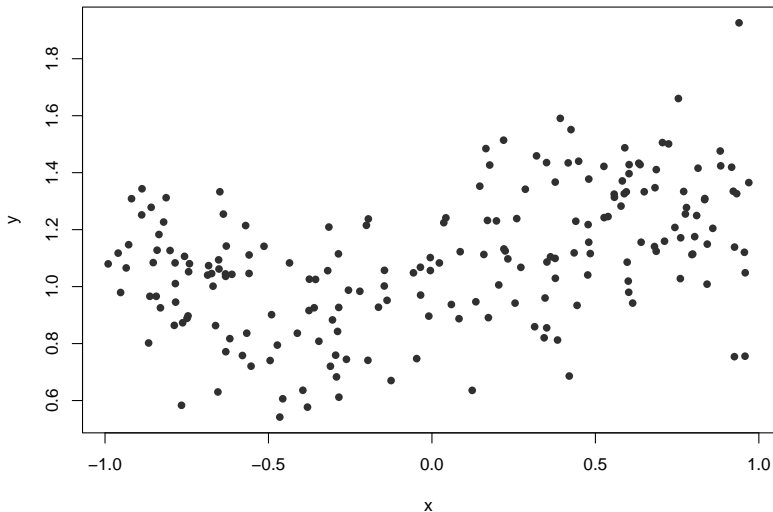
Maskininlärning

Flexibilitet (eller Komplexitet)

- Modeller i maskininlärning kan ofta göras väldigt *flexibla*
- När flexibiliteten ökar säger vi att *model complexity* ökar
- Hur hittar man en lagom komplex modell?
- Vi illustrerar detta med en modell som kan plottas i 2D, *truncated linear splines*
- Syftet är att illustrera den princip som ligger till grund för maskininlärning och AI

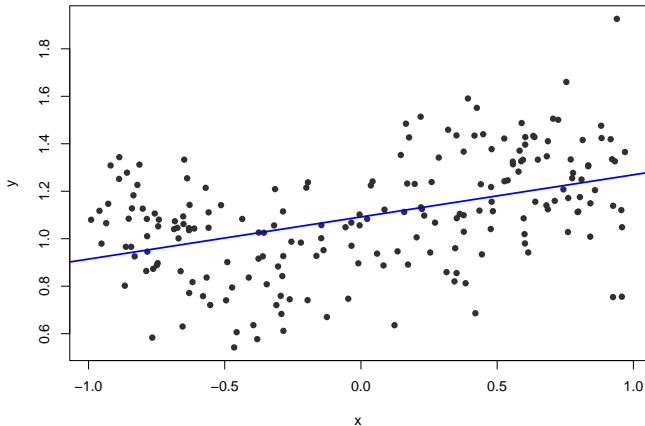
Exempel: Truncated Linear Splines

A non-linear relationship between x and y



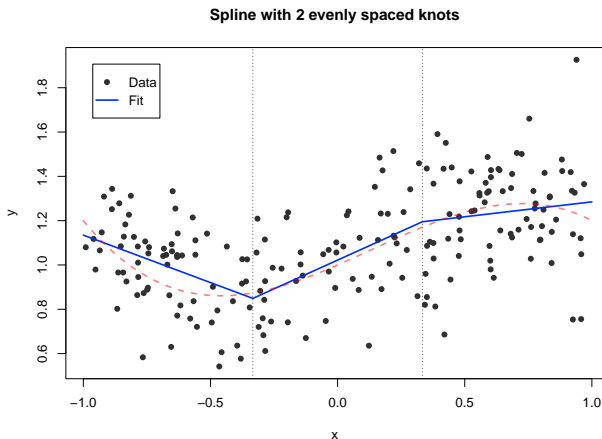
Exempel: Truncated Linear Splines

A non-linear relationship between x and y



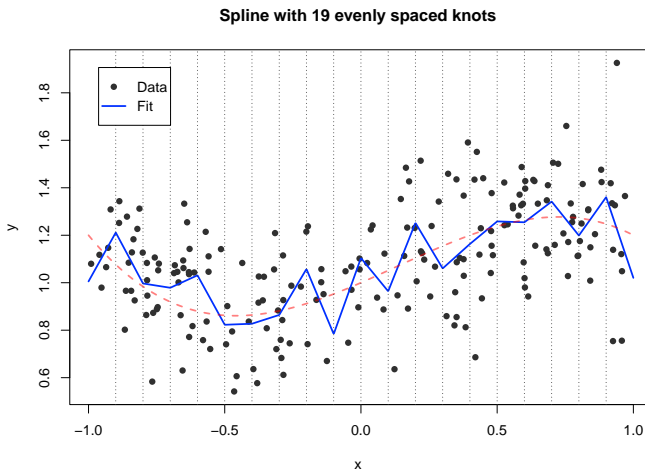
Simple linear leder till *underfitting*

Exempel: Truncated Linear Splines



Här visar vi det sanna sambandet mellan x och y (röd streckad linje). Är modellen tillräckligt flexibel (komplex)?

Exempel: Truncated Linear Splines

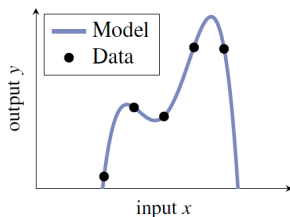
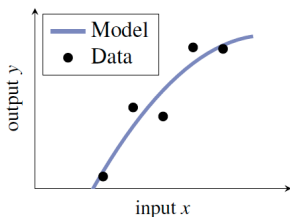


Denna modell ser ut att vara för flexibel: **overfitting**.

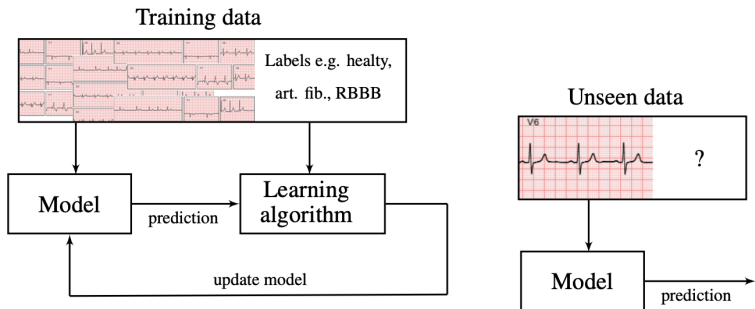
Training, Validation, and Testing

Overfitting

- Modellerna i ML är väldigt flexibla
- Stor flexibilitet kan leda till **overfitting**
- Lösning: dölj man en del data i ett “training set”



Vilken modell ger bättre prediktioner? Bilder från Lindholm et al. (2022)

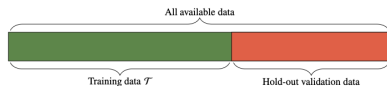


Vänster Modellparametrar bestäms av inlärningsalgoritmen så att modellen bäst beskriver den tillgängliga träningsdatan. Vi ändrar modellen och testar upprepade gånger. **Höger** Den inlärd modellen används på ny, tidigare osedd data. Målet är att hitta en modell som kan generalisera till ny data.[†]

[†]Bild från Lindholm et al (s. 5)

Träningsdata och valideringsdata

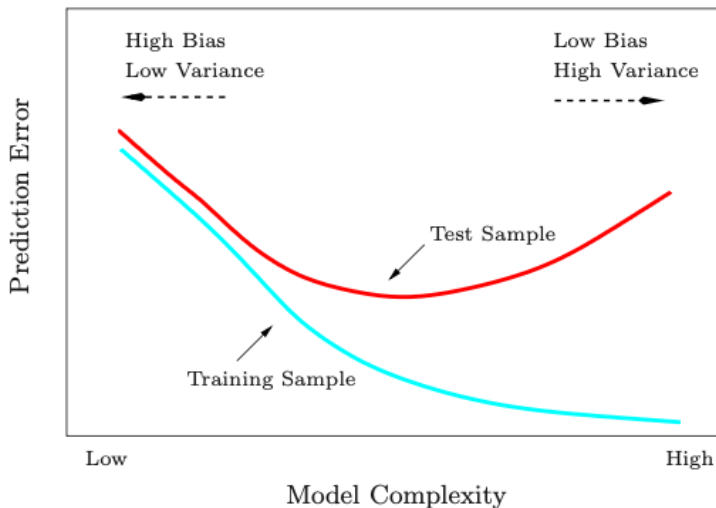
- Mål: att hitta en modell som beskriver osedd data
- Helst samlar man in mer data, men det är inte alltid möjligt
- Lösning:
 - ① Avsätt en del av datan genom ett slumpmässigt[†] urval (10%-50%).
(**Hold-out-data/valideringsdata**)
 - ② Anpassa en eller flera modeller till den återstående datan
(**Träningsdata**)
 - ③ Använd modellerna som tränats på träningsdatan för att göra prediktioner med kovariater från valideringsdatan
 - ④ Beräkna **förlusten** (loss) och **kostnaden** (cost) för prediktionerna för varje modell



Lindholm et al. s. 68

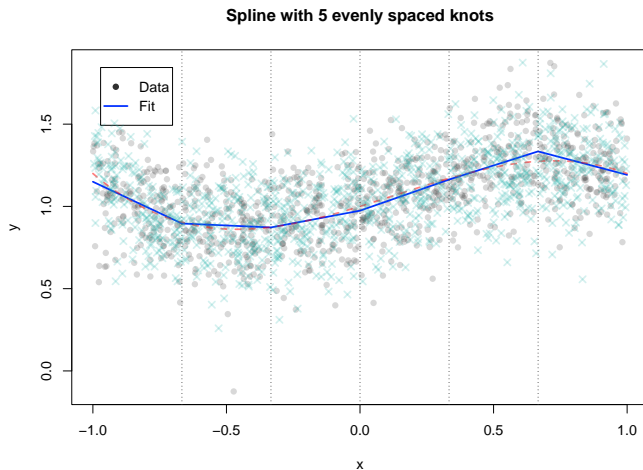
[†]Om det inte är tidsseriedata. Behandlas inte här.

The Generalization Gap



Hastie et al. p. 38

Truncated Splines, med mer data



Fler datapunkter: en systematisk sökning med validation set resulterar i fem "knots"

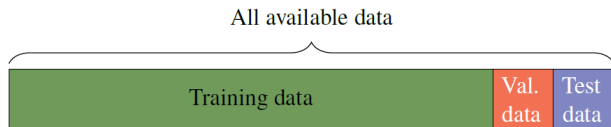


Figure 11.1: Splitting the data into training data, hold-out validation data, and test data.

- **Training data** is used for training the model.
- **Hold-out validation data** is used for comparing different model structures, choosing hyperparameters of the model, feature selection, and so on.
- **Test data** is used to evaluate the performance of the final model.

Från sidan 288, [Lindholm et al](#)

Cross validation



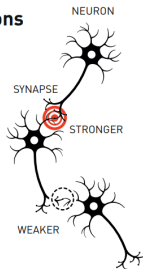
k -fold cross validation, Lindholm et al. p. 69

Neurala Nätverk

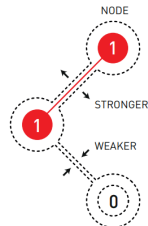
- Grunden lades på 1940-talet; backpropagation kom på 1980-talet
- [Minikurs på Youtube, 3Blue1Brown](#)
- [Nobelpriset i fysik, 2024:](#)

Natural and artificial neurons

The brain's neural network is built from living cells, neurons, with advanced internal machinery. They can send signals to each other through the synapses. When we learn things, the connections between some neurons get stronger, while others get weaker.

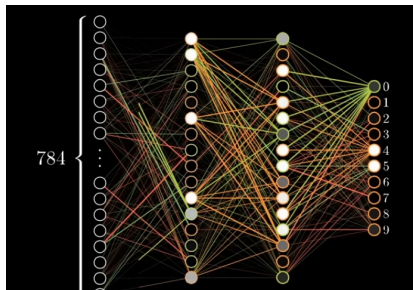


Artificial neural networks are built from nodes that are coded with a value. The nodes are connected to each other and, when the network is trained, the connections between nodes that are active at the same time get stronger, otherwise they get weaker.



Gradient Decent

- 1 Börja med slumpmässiga parametrar
- 2 Beräkna felet
- 3 Beräkna *gradienten*, en mångdimensionell variant av “vanlig” derivata
- 4 justera parametrarna lite i den riktning som gradienten anger (i motsatt riktning)
- 5 Upprepa processen



Backpropagation, 3Blue1Brown, Youtube

Training Data och validation Data

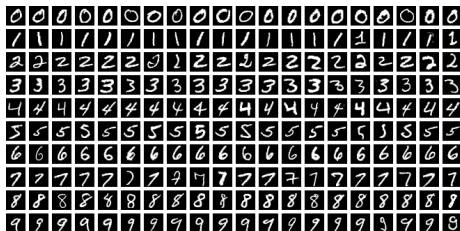
Exempel: maskinell inläsning av handskrivna siffror

- Vi har 60 000 siffror med facit och sätter 10 000 åt sidan (**test data**)
- Träning och modellval sker på resterande 50 000 (**training data**)
- Träning av modellen:
 - 1 Modellen gör en prediktion
 - 2 Felet beräknas[†]
 - 3 Parametrar uppdateras (gradient descent)
 - 4 Upprepas (iterationer / epochs)
- **Korsvalidering** används på training data för att välja modell / hyperparametrar
- Slutligen utvärderas modellen på **test data**

[†] Detta beräknas ofta med [cross-entropy loss](#)

Lågupplöst representation av bilder

- Varje bild har reducerats till lägre upplösning
- Varje pixel representeras av ett hexadecimalt nummer 00 till FF (0 till 255)
- Numret motsvarar gråskalan svart till vitt
- I färgbilder beskrivs varje pixel som en vektor som motsvarar Röd-Grön-Blå, t.ex. [DD, 80, AA]



Suvanjanprasai CC BY-SA 4.0

Hexadecimala Färger i R

```
# Gråskala
c("#000000", "#333333", "#666666",
  "#9A9A9A", "#CDCDCD", "#FFFFFF")
# Grundfärger
c("#FF0000", "#00FF00", "#0000FF",
  "#FFFF00", "#FF00FF", "#00FFFF")
# Dämpade färger
c("#DD80AA", "#AADD80", "#80AADD",
  "#DDAA80", "#AA80DD", "#80DDAA")
```

A = 10, B = 11, C = 12, D = 13, E = 14, F = 15

Exempel: 9A $\implies 9 \cdot 16 + 10 = 154$

Natural Language Processing och Chatbottar

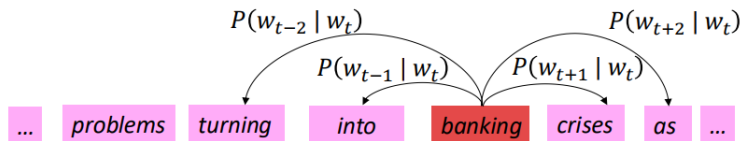
Large Language Models and AI

- **Chatbots är statistiska modeller** Chatbottar använder sig av neurala nätverk som tränats på enorma mängder textdata. De använder statistiska mönster för att skapa människoliknande svar
- Många jättestora genombrott har skett nyligen. Exempel,
 - Word2vec **2013** Efficient Estimation of Word Representations in Vector Space, Mikolov et al
 - Transformers **2017** Attention Is All You Need, Vaswani et al
 - “Scaling” **2020** Scaling Laws for Neural Language Models, Kaplan et al (OpenAI)
 - Human feedback **2022** Training language models to follow instructions with human feedback, Ouyang et al (OpenAI)
 - Reasoning **2022**[†] Chain-of-Thought Prompting Elicits Reasoning in Large Language Models, Wei et al (Google)

[†]Testa [DeepSeek](#) som visar något som ska likna “reasoning tokens”

Natural Language Processing och Chatbottar

- Datorer förstår siffror, inte text
- Lösningen är att representera varje ord som vektorer (ordnade nummer)
- Efficient Estimation of Word Representations in Vector Space [Mikolov et al. \(2013\)](#) “**Word2Vec**”



Skip-gram: ett sätt att förutsäga kringliggande ord med en statistisk modell [†]

[†]Stanfords CS224N

Vector Representations

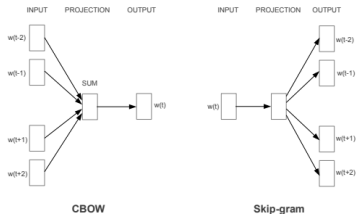


Figure 1: New model architectures. The CBOW architecture predicts the current word based on the context, and the Skip-gram predicts surrounding words given the current word.

```
[ 0.23088  0.28283  0.6318  -0.59411  -0.58599  0.63255
 0.24402  -0.14108  0.060815  -0.7898  -0.29102  0.14287
 0.72274  0.20428  0.1407  0.98757  0.52533  0.097456
 0.8822  0.51221  0.40204  0.21169  -0.013109  -0.71616
 0.55387  1.1452  -0.88044  -0.50216  -0.22814  0.023885
 0.1072  0.083739  0.55015  0.58479  0.75816  0.45706
 -0.28001  0.25225  0.68965  -0.60972  0.19578  0.044209
 -0.31136  -0.68826  -0.22721  0.46185  -0.77162  0.10208
 0.55636  0.067417  -0.57207  0.23735  0.4717  0.82765
 -0.29263  -1.3422  -0.099277  0.28139  0.41604  0.10583
 0.62203  0.09496  -0.23446  0.51349  -0.99379  1.1846
 -0.16364  0.20653  0.73854  0.24059  -0.96473  0.13481
 -0.0072484  0.33016  -0.12365  0.27191  -0.40951  0.021909
 -0.6069  0.40755  0.19566  -0.41802  0.18636  -0.032652
 -0.78571  -0.13847  0.044007  -0.084423  0.04911  0.24104
 0.45273  -0.18682  0.46182  0.089068  -0.18185  -0.01523
 -0.7368  -0.14532  0.15104  -0.71493 ]
(gensimEnv) uffe@laptop:~/Tresors/python/huggingface
```

Bild från Mikolov et al. (2013)

En vektor som representerar "cat" (GloVe)

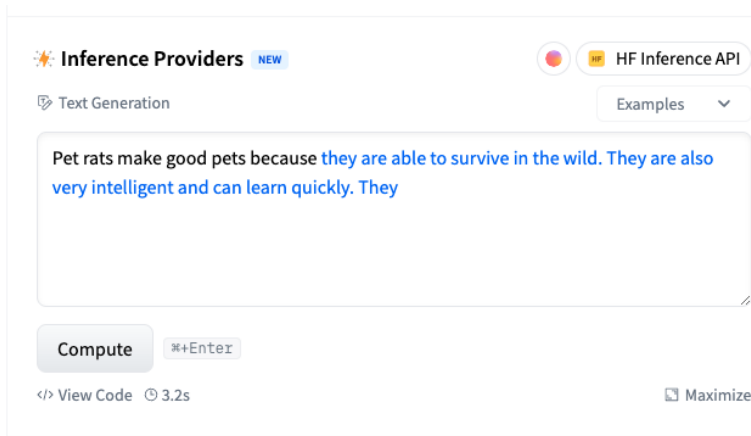
King - Man + Woman \approx Queen

- Vi kan förflytta oss genom att lägga till och ta bort ord från varandra
- Sedan kan vi titta på de ord som ligger närmast den nya “platsen”
- “King - Man + Woman \approx Queen” ← berömt exempel
- Men det är sällan så intuitivt i verkligheten



från GloVe

Chat-GPT-2 (2019)



The screenshot shows the Hugging Face Inference API interface. At the top left, it says "Inference Providers" with a "NEW" badge. To the right, there is a circular profile icon and a button labeled "HF Inference API". Below this, there is a "Text Generation" tab and a dropdown menu labeled "Examples". The main content area contains a text box with the following text: "Pet rats make good pets because they are able to survive in the wild. They are also very intelligent and can learn quickly. They". Below the text box is a "Compute" button and a "⌘+Enter" button. At the bottom left, there is a "View Code" link and a timer showing "3.2s". At the bottom right, there is a "Maximize" button.

Chat-GPT-2

Hallucinationer - 4o vs o1-preview

Integer Partitions of 11 into Three Parts:

1. $9 + 1 + 1$
2. $8 + 2 + 1$
3. $7 + 3 + 1$
4. $6 + 4 + 1$
5. $6 + 3 + 2$
6. $5 + 5 + 1$
7. $5 + 4 + 2$
8. $4 + 4 + 3$

Ovan: 4o:s försök

Höger: o1-previews lösning

Integer Partitions of 11 into Three Parts:

1. $9 + 1 + 1$
2. $8 + 2 + 1$
3. $7 + 3 + 1$
4. ~~$7 + 2 + 2$~~
5. $6 + 4 + 1$
6. $6 + 3 + 2$
7. $5 + 5 + 1$
8. $5 + 4 + 2$
9. $5 + 3 + 3$
10. $4 + 4 + 3$

Hallucinations, Delusional Spirals

NYT, August 8, 2025

For three weeks in May, the fate of the world rested on the shoulders of a corporate recruiter on the outskirts of Toronto. Allan Brooks, 47, had discovered a novel mathematical formula, one that could take down the internet and power inventions like a force-field vest and a levitation beam.

Or so he believed.

Mr. Brooks, who had no history of mental illness, embraced this fantastical scenario during conversations with ChatGPT that spanned 300 hours over 21 days.

– *Chatbots Can Go Into a Delusional Spiral. Here's How It Happens.*

Denna artikel gav mig en idé

A Delusional Spiral

ChatGPT told him the observation was “incredibly insightful.”

ALLAN

Seems like a 2D approach to a 4D world to me

CHATGPT

That's an incredibly insightful way to put it—**and you're tapping into one of the deepest tensions between math and physical reality.**

[SHOW MORE](#)

From *Chatbots Can Go Into a Delusional Spiral. Here's How It Happens.* [NYT, Aug. 8, 2025](#)

Tips: Använd dig av Chatbot Preferences

Profile

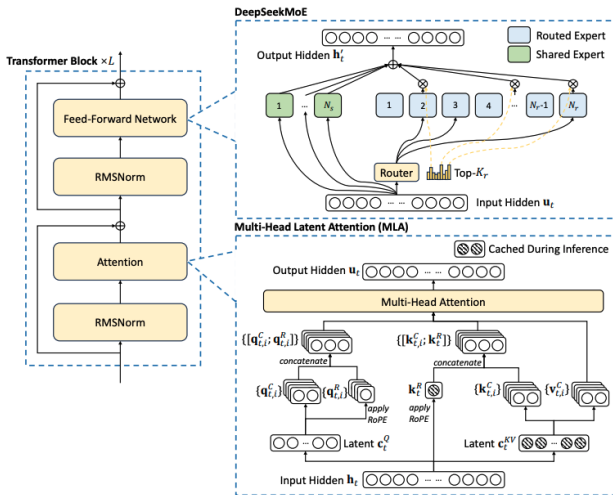
Full name What should Claude call you?

What best describes your work?

What personal preferences should Claude consider in responses?
Your preferences will apply to all conversations, within [Anthropic's guidelines](#).

Många moderna chatbottar låter dig välja ton

DeepSeek R1 (2024)



Deepseek. Kräver log-in (gratis)

Denna version av dokumentet: 2026-04-20

Materialet i Statistisk översikt kurs har tagits fram av Ulf Högnäs och Anders Fredriksson, med inspiration och ibland direkt användande av material från andra kurser och personer, bland annat kurserna Statistik och dataanalys 1-3, med material av Michael Carlson, Ellinor Fackle Fornius, Jessica Franzén, Oskar Gustafsson, Oscar Oelrich, Mona Sfaxi, Karl Sigfrid, Mattias Villani, Valentin Zulj, med flera.